

Cavidades resonantes

Se puede demostrar que una línea de transmisión corto circuitado en ambos extremos exhibe propiedades resonantes a frecuencias cuando la longitud es $\lambda/2$ o un múltiple de $\lambda/2$. De la analogía directo se espera que el mismo fenómeno ocurre cuando una sección de guía de onda es corto circuitado en ambos extremos. Cuando se colocan placas metálicas sobre los extremos de las guías, hay una region dieléctrica completamente envuelta por una superficie conductora. Esto es la cavidad resonante. Se puede ver que hay una gran cantidad de modos de resonancia posible, de hecho, una infinidad de ellos. Para cada modo de guía de onda habrá un número infinito de múltiplos de $\lambda/2$ que caben en la dirección longitudinal entre los dos extremos. Entonces una triple infinidad de modos es posible. Normalmente sólo los modos de orden bajo son de interés, y el de la frecuencia resonante más bajo se refiere como el modo dominante.

Antes de proceder a la solución matemática de unos casos geométricos sencillos, se debe mencionar que este método de analizar las cavidades resonantes es algo restrictivo. Conduce a una solución de esas configuraciones geométricas que tengan propiedades cilíndricas generales, es decir, los que tengan la misma sección transversal arbitraria cuando se ve en cualquier punto a lo largo del eje longitudinal. En realidad una región dieléctrica de cualquier forma que se encierra por una superficie conductora exhibe propiedades resonantes y esto es la forma más general de la cavidad resonante. La solución de tal problema general es bastante difícil; así que nos enfocamos en unos casos sencillos que podemos resolver al utilizar la teoría de línea de transmisión.

El estudio de las cavidades resonantes es una ciencia ingenieril relativamente nueva, aunque la teoría fundamental se remonta a los tiempos de Maxwell. La falta de interés ingenieril en las cavidades resonantes probablemente se debe a las frecuencias extremadamente altas requeridas para estructuras resonantes de tamaños razonables. Estas fuentes de alta frecuencias y sus equipos de pruebas asociados no estaban disponibles hasta hace poco, de manera que el trabajo experimental en este área no fue posible. El interés en las cavidades resonantes empezó en los años 30 del siglo pasado, cuando W. W. Hansen publicó dos artículos sobre resonadores eléctricos y son la base del estudio de de las cavidades resonantes de nuestros tiempos.

Resonadores rectangular y cilíndrico

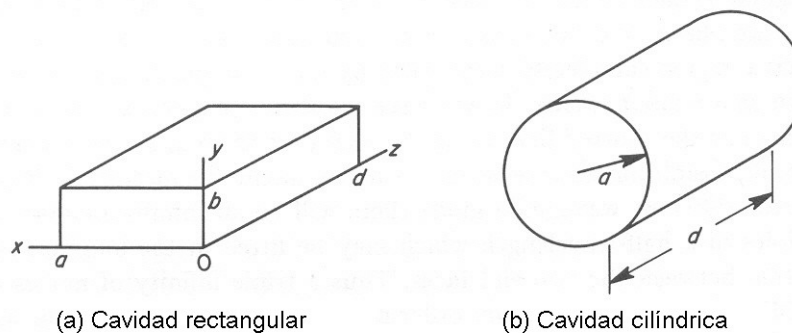


Figura 1.
Sistema de coordenadas para las cavidades rectangular y cilíndrica.

Los resonadores rectangular y cilindrico son dos casos especiales que se resuelven rápidamente en términos de la teoría de guía de ondas. Usamos los mismos sistemas de coordenadas como en la teoría de guía de ondas y especificamos la longitud de los resonadores como d , como se muestra en la figura 1. Cuando se colocan placas conductoras (corto circuitos) en ambos extremos de la sección de guía de onda, el coeficiente de reflexión es -1 en estos puntos. Así existen dos ondas dentro del resonador, una incidente y una reflejada, que son iguales en magnitud y en fase de manera que existirán nodos en el campo eléctrico transversal en ambos extremos. Se puede ver que βd debe ser un múltiple de π ; es decir,

$$\beta d = p\pi \quad (1)$$

donde p es un entero. Ahora, de la teoría de guía de onda, k_c^2 está relacionado con la frecuencia a través de

$$k_c^2 = \gamma^2 + \omega^2 \mu \epsilon = -\beta^2 + \omega^2 \mu \epsilon \quad (2)$$

Al combinar las ecuaciones (1) y (2) conduce a la ecuación para la frecuencia resonante:

$$\omega_r = \frac{1}{\sqrt{\mu \epsilon}} \sqrt{\left[k_c^2 + \left(\frac{p\pi}{d} \right)^2 \right]} \quad (3)$$

Esta fórmula se aplica a cualquier cavidad tipo guía de onda. Se recuerda de la teoría de guía de onda que k_c es una constante que depende sólo del modo y de la geometría de la sección transversal de la guía involucrada. Para el caso de la guía de onda rectangular,

$$k_c^2 = \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 \quad (\text{tanto para los modos TE como TM}) \quad (4)$$

Para el caso cilíndrico,

$$k_c^2 = \left(\frac{p_{nm}}{a} \right)^2 \quad (\text{modo TM}) \quad (5.a)$$

$$k_c^2 = \left(\frac{p'_{nm}}{a} \right)^2 \quad (\text{modo TE}) \quad (5.b)$$

Note que hay tres grados de arbitrariedad en la selección de los modos, dos que resultan del modo de la guía de onda y el tercero del número de media longitudes de onda en la dirección axial. Una notación de subíndices es útil para identificar los diferentes modos posibles en una cavidad resonante, exactamente como se hizo con la guía de onda. El procedimiento usual es llevar los dos subíndices del modo de la guía de onda del cual la cavidad resonante se deriva y luego agregar un tercer subíndice para indicar el número de

media longitudes de onda en la dirección axial. Por ejemplo, el modo TE_{101} en el resonador rectangular se deriva del modo de guía de onda TE_{10} y tiene *una* variación de medio ciclo en la dirección z . La frecuencia de resonancia de este modo está dado por

$$\omega_r = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}} \sqrt{\left[\left(\frac{1. \pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{0. \pi}{b}\right)^2 + \left(\frac{1. \pi}{d}\right)^2\right]} \quad (\text{modo } TE_{101}) \quad (6)$$

La configuración resultante de los campos se muestran en la figura 2.

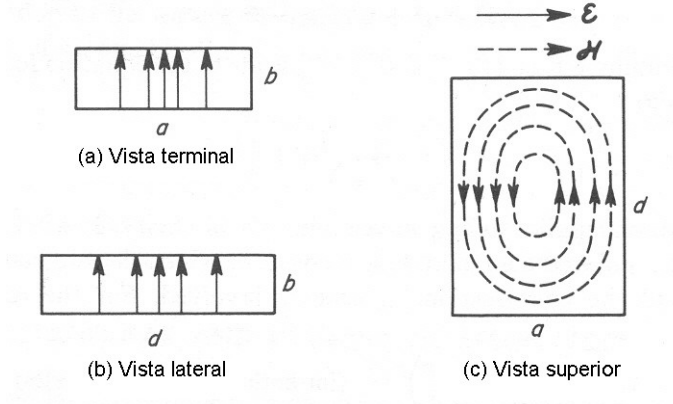


Figura 2.
Configuración de los campos para el modo TE_{101} .

Ejemplo 1

Ahora es instructivo desarrollar las expresiones explícitas para los campos del modo TE_{101} en un resonador rectangular formado al colocar dos placas conductoras (corto circuitos) sobre los extremos de una sección de guía de onda rectangular de longitud d .

Las dimensiones de la GOR son $a \times b$. Empezamos con las expresiones para los campos del modo TE_{10} en una GOR. Estos son:

$$E_y = E_0 \text{sen} \frac{\pi x}{a}$$

$$H_x = -\frac{E_0}{Z_{0(TE)}} \text{sen} \frac{\pi x}{a}$$

$$H_z = j \frac{E_0}{\eta} \frac{\lambda}{2a} \cos \frac{\pi x}{a}$$

$$E_x = E_z = H_y = 0$$

Ahora insertamos la dependencia en z , $e^{-j\beta z}$ para las ondas que se propagan en la

dirección $+z$ y $e^{+j\beta z}$ para las ondas que se propagan en la dirección $-z$. Las componentes no-nulas para la onda propagándose en la dirección $+z$ son:

$$E_y^+ = E_0^+ \operatorname{sen} \frac{\pi x}{a} e^{-j\beta z}$$

$$H_x^+ = -\frac{E_0^+}{Z_{0(\text{TE})}} \operatorname{sen} \frac{\pi x}{a} e^{-j\beta z}$$

$$H_z^+ = j \frac{E_0^+}{\eta} \frac{\lambda}{2a} \cos \frac{\pi x}{a} e^{-j\beta z}$$

Las componentes no-nulas para la onda propagándose en la dirección $-z$ son:

$$E_y^- = E_0^- \operatorname{sen} \frac{\pi x}{a} e^{+j\beta z}$$

$$H_x^- = -\frac{E_0^-}{Z_{0(\text{TE})}} \operatorname{sen} \frac{\pi x}{a} e^{+j\beta z}$$

$$H_z^- = j \frac{E_0^-}{\eta} \frac{\lambda}{2a} \cos \frac{\pi x}{a} e^{+j\beta z}$$

Para la onda que se propaga en la dirección $-z$, la orientación del campo eléctrico se asume igual a la orientación del campo eléctrico de la onda propagándose en la dirección $+z$. Esto obliga a la componente transversal del campo magnético (H_x) a ser orientada en la dirección opuesta para la componente transversal del campo magnético propagándose en la dirección $-z$. Estas ondas existen simultáneamente en la estructura rectangular, de manera que podemos escribir las ondas compuestas como

$$E_y = (E_0^+ e^{-j\beta z} + E_0^- e^{+j\beta z}) \operatorname{sen} \frac{\pi x}{a}$$

$$H_x = (-E_0^+ e^{-j\beta z} + E_0^- e^{+j\beta z}) \frac{1}{Z_{0(\text{TE})}} \operatorname{sen} \frac{\pi x}{a}$$

$$H_z = j \frac{E_0^-}{\eta} \frac{\lambda}{2a} (E_0^+ e^{-j\beta z} + E_0^- e^{+j\beta z}) \cos \frac{\pi x}{a}$$

Las condiciones de borde requieren que el campo eléctrico tangencial desaparezca en $z = 0$ y $z = d$. Así $E_y = 0$ en $z = 0$, es decir,

$$(E_0^+ + E_0^-) \operatorname{sen} \frac{\pi x}{a} = 0$$

Aquí se escoge $E^- = E_0$ y $E^+ = -E_0$. Al sustituir en la expresión para E_y se obtiene

$$E_y = E_0 (e^{-j\beta z} - e^{+j\beta z}) \operatorname{sen} \frac{\pi x}{a} = 2jE_0 \operatorname{sen} \beta z \operatorname{sen} \frac{\pi x}{a}$$

Para satisfacer la condición de borde que $E_y = 0$ en $z = d$, $\beta = \pi/d$. Las otras componentes de campo ahora se pueden determinar:

$$H_x = \frac{2E_0}{Z_{0(\text{TE})}} \cos \frac{\pi z}{d} \operatorname{sen} \frac{\pi x}{a}$$

$$H_z = -\frac{\lambda 2E_0}{\eta 2a} \operatorname{sen} \frac{\pi z}{d} \cos \frac{\pi x}{a}$$

Usando las relaciones

$$Z_{0(\text{TE})} = \frac{\eta}{\sqrt{[1 - (\omega_c/\omega_r)^2]}} \quad \text{y}$$

$$\frac{\lambda}{2a} = \frac{\lambda}{\lambda_c} = \frac{\omega_c}{\omega_r}$$

(en este caso $\omega = \omega_r$) podemos escribir las expresiones para los campos como:

$$E_y = 2jE_0 \operatorname{sen} \frac{\pi z}{d} \operatorname{sen} \frac{\pi x}{a}$$

$$H_x = \frac{2E_0 \sqrt{1 - (\omega_c/\omega_r)^2}}{\eta} \cos \frac{\pi z}{d} \operatorname{sen} \frac{\pi x}{a}$$

$$H_z = -\frac{2E_0 \omega_c}{\omega_r \eta} \operatorname{sen} \frac{\pi z}{d} \cos \frac{\pi x}{a}$$

En estas ecuaciones,

$$\omega_c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} \left(\frac{\pi}{a} \right), \quad \omega_r = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} \sqrt{\left(\frac{\pi}{a} \right)^2 + \left(\frac{\pi}{d} \right)^2} \quad \text{y} \quad \eta = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}}.$$